578. D’Amore B. (2006). Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso. In: D’Amore B., Sbaragli S. (eds.) (2006). *Il convegno del ventennale*. Atti del Convegno Nazionale “Incontri con la Matematica” n. 20. Castel San Pietro Terme, 3-4-5 novembre 2006. Bologna: Pitagora. 15-22.

Oggetti matematici, trasformazioni semiotiche e senso

Bruno D’Amore

NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienza della Formazione, Università di Bolzano, Italia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera
MESCUD, Università Distrital “F. José de Caldas”, Bogotà, Colombia

Summary. I want to show a consequence that sometimes reveals in treatment and conversion semiotic transformations of a semiotic representation whose sense derives from a shared practice; the shift from a representation of a mathematical object to another through transformations, on the one hand maintains the meaning of the object itself, but on the other sometimes can change its sense. This is shown in detail through an example, although it is inserted within a wide theoretical framework that takes into account mathematical objects, their meanings and their representations.

1. Premessa

Capita spesso, a qualsiasi livello scolastico, in situazioni matematiche anche molto differenti tra loro, che tutti noi siamo sorpresi da una dichiarazione che rivela d’improvviso una mancata costruzione concettuale su argomenti che sembravano invece solidamente acquisiti.
Farò una carrellata di esempi trovati in questi anni e cercherò di dare una delle possibili spiegazioni di questo fenomeno, studiando in particolare un esempio. Gli esempi sono scelti in modo opportuno; essi NON esauriscono tutti i casi possibili che mi sono capitati (o che mi sono stati segnalati); attraverso di essi voglio fare il punto solo su un aspetto del fenomeno, quello che voglio esaminare in questa occasione e che espliciterò solo in un secondo momento.
Per motivi di brevità, evito in questa occasione discorsi generali introduttivi; mi limiterò solo a dire il minimo indispensabile; il lettore interessato troverà una trattazione assai più completa in:

D’Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. In: D’Amore B., Radford L. (eds.) (2006). Numero unico monotematico della rivista *Relime* del Cinvestav (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politecnico Nacional, México DF, México) sul tema: *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, con testi di: F. Arzarello (Italia), G.T. Bagni (Italia), R. Cantoral, G. Martínez-Sierra (México), M. Cerulli (Italia), B. D’Amore (Italia), R. Duval (Francia), A. Gagatsis (Cipro), J.D. Godino (Spagna), M. Otte (Germania), L. Rico (Spagna), A. Sáenz-Ludlow (USA), L. Radford (Canada). In corso di stampa.

In tutti gli esempi di cui dispongo, pur nella loro enorme varietà, c'è qualche cosa di profondamente comune:

- si parte da un oggetto di conoscenza matematica, il che in un colpo solo chiamerò "oggetto matematico";
- tale oggetto ha per chi parla un senso acquisito;
- tale oggetto ha per chi parla una rappresentazione semiotica acquisita;
- si operano trasformazioni semiotiche di tale rappresentazione;
- si ottiene un nuovo oggetto;

ebbene:

- il senso di tale ultimo oggetto non sempre viene riconosciuto come identico a quello dell'oggetto di partenza.

Detto in altre parole: *le trasformazioni semiotiche cambiano senso all'oggetto di partenza, portando alla costruzione di un oggetto matematico che ha un altro senso*.

Questo iter è il punto fondamentale che dovremo esplorare.

Quando si parla dell'apprendimento dei concetti, non possiamo non citare il *paradosso di Duval* (Duval, 1993, pag. 38), ben noto, e decisamente in linea con quel che scrive Radford: «Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?» (Radford, 2005).

Fuor di dubbio, la rappresentazione degli oggetti in matematica privilegia l'uso di segni specifici; ma i segni sono artefatti, oggetti a loro volta "linguistici" (in senso lato), termini che hanno lo scopo di rappresentare per indicare: «Quali sono i mezzi per mostrare l'oggetto? Sono quelli che chiamo *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono oggetti, artefatti, termini linguistici, in generale segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione» (Radford, 2005).

2. Oggetto, suo significato, sue rappresentazioni semiotiche: un episodio

2.1. *L'episodio*

Siamo in quinta primaria e l'insegnante ha svolto una lezione in situazione a-didattica sui primi elementi della probabilità, facendo costruire agli allievi, almeno tramite qualche esempio, l'idea di "evento" e di "probabilità di un evento semplice". Come esempio, l'insegnante ha fatto fare uso di un normale dado a sei facce, studiando le uscite casuali da un punto di vista statistico. Ne emerge una probabilità frequentista che, però, viene interpretata in senso classico. A questo punto propone il seguente esercizio:

Calcolare la probabilità del seguente evento: uscita di un numero pari nel lancio di un dado.

Gli allievi, discutendo in gruppo e soprattutto compartendo pratiche sotto la regìa dell'insegnante, giungono a decidere che la risposta è espressa dalla frazione $\frac{3}{6}$ perché «le uscite possibili nel lancio sono 6 (al denominatore) mentre le uscite che rendono vero l'evento sono 3 (al numeratore)».
Dopo aver istituzionalizzato la costruzione di questa conoscenza, soddisfatto dell'esperienza efficace, contando sul fatto che questo risultato è stato ottenuto piuttosto rapidamente e sul fatto che gli allievi hanno dimostrato grande abilità nel maneggiare le frazioni, il maestro propone che, valendo l'equivalenza fra $\frac{3}{6}$ e $\frac{50}{100}$, si possa esprimere quella probabilità anche con la scrittura 50%, che è molto espressiva: significa che si ha la metà delle probabilità di verifica di quell'evento rispetto alla generalità degli eventi possibili, presa come 100. Qualcuno nota che «allora va bene anche la [frazione] $\frac{1}{2}$»; la proposta viene validata attraverso le dichiarazioni del proponente, rapidamente è ben accolta da tutti e, ancora una volta, istituzionalizzata dall'insegnante.

2.2. *Analisi semiotica*

Se si analizzano le rappresentazioni semiotiche differenti che sono emerse in questa attività, relative allo stesso evento: "uscita di un numero pari nel lancio di un dado", troviamo almeno le seguenti:

- registro semiotico lingua naturale: probabilità dell'uscita di un numero pari nel lancio di un dado
- registro semiotico linguaggio delle frazioni: $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$, $\frac{1}{2}$
- registro semiotico linguaggio delle percentuali: 50%.

2.3. *Il senso compartito da diverse rappresentazioni semiotiche*

Ciascuna delle precedenti rappresentazioni semiotiche è il significante *a valle* dello stesso significato *a monte* (Duval, 2003). Il "senso" compartito a proposito di quel che si andava costruendo era sempre identicamente presente e dunque la pratica matematica effettuata e così descritta ha portato a trasformazioni semiotiche i cui risultati finali sono stati facilmente accettati:

- conversione: tra la rappresentazione semiotica espressa nel registro lingua naturale e $\frac{3}{6}$
- trattamento: tra $\frac{3}{6}$, $\frac{50}{100}$ e $\frac{1}{2}$
- conversione: tra $\frac{50}{100}$ e 50%.

2.4. *Conoscenze previe necessarie*

Sono in gioco diverse conoscenze, apparentemente ciascuna ben costruita, che interagiscono tra loro:

- conoscenza ed uso delle frazioni
- conoscenza ed uso delle percentuali
- conoscenza ed uso dell'evento: uscita di un numero pari lanciando un dado.

Ciascuna di queste conoscenze si manifesta attraverso l'unitarietà e la condivisione delle pratiche nel gruppo classe.

2.5. *Séguito dell'episodio: la perdita del senso condiviso a causa di trasformazioni semiotiche*

Terminata la sessione, si propone agli allievi la frazione $\frac{4}{8}$ e si chiede se, essendo equivalente a $\frac{3}{6}$, anche questa frazione rappresenta l'evento esplorato poc'anzi. *La risposta unanime e convinta è negativa*. Lo stesso maestro, che prima aveva condotto con sicurezza la regìa della situazione, afferma che «$\frac{4}{8}$ *non può* rappresentare quell'evento perché le facce di un dado sono 6 e non 8». All'insistenza del ricercatore nel sapere il suo pensiero al riguardo, l'insegnante dichiara che «esistono non solo dadi a 6 facce, ma anche dadi a 8 facce; in quel caso, sì, la frazione $\frac{4}{8}$ rappresenta l'uscita di un numero pari nel lancio di un dado».

Esaminerò quel che sta accadendo in aula da un punto di vista semiotico; ma sono prima costretto a generalizzare la questione.

3. Un simbolismo per le basi della semiotica

Mi servirò delle definizioni usuali e della simbologia da me introdotta (D'Amore, 2001, 2003a,b, ma anche altrove):

semiotica $=_{df}$ rappresentazione realizzata per mezzo di un sistema di segni

noetica $=_{df}$ acquisizione concettuale di un oggetto.[1]

Indicherò, d'ora in poi:

r^m $=_{df}$ registro semiotico m-esimo

$R^m{}_i(A)$ $=_{df}$ rappresentazione semiotica i-esima di un concetto A nel registro semiotico r^m

[1] Per Platone, la noetica è l'atto di concepire attraverso il pensiero; per Aristotele, l'atto stesso di comprensione concettuale.

(m = 1, 2, 3, …; i = 1, 2, 3, …).
Si può notare che, se cambia il registro semiotico, cambia necessariamente anche la rappresentazione semiotica, mentre non è detto il viceversa; cioè può cambiare la rappresentazione semiotica pur mantenendosi lo stesso registro semiotico.
Uso un grafico per illustrare la questione, più incisivo ed efficace:[2]

caratteristiche della semiotica $\begin{cases} \textit{rappresentazione} \\ \textit{trattamento} \\ \textit{conversione} \end{cases}$ (implicano attività cognitive diverse)

concetto A da rappresentare $\Rightarrow$ scelta dei tratti distintivi di A

$\Downarrow$

RAPPRESENTAZIONE di A $R^m_i(A)$ in un dato registro semiotico r^m

trasformazione di rappresentazione *TRATTAMENTO*

nuova rappresentazione ($i \neq j$) $R^m_j(A)$ nello *stesso* registro semiotico r^m

trasformazione di registro *CONVERSIONE*

nuova rappresentazione ($h \neq i$, $h \neq j$) $R^n_h(A)$ in un *altro* registro semiotico r^n ($n \neq m$)
(m, n, i, j, h = 1, 2, 3, …)

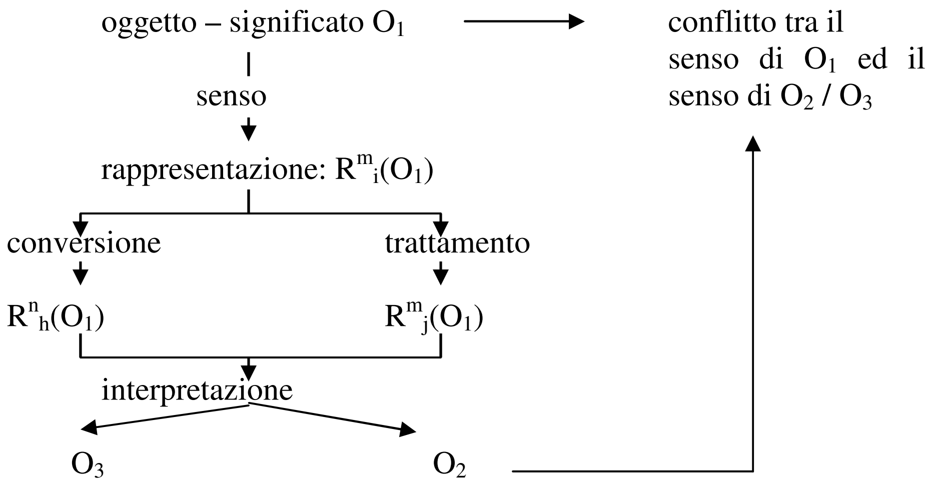
4. Torniamo all'episodio

- C'è un oggetto (significato) matematico O_1 da rappresentare: probabilità dell'uscita di un numero pari nel lancio di un dado;
- gli si dà un *senso* derivante dall'esperienza che si pensa condivisa, in una pratica sociale che viene costruita in quanto compartita in aula;
- si sceglie un registro semiotico r^m e in esso si rappresenta O_1: $R^m_i(O_1)$;
- si opera un trattamento: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$;
- si opera una conversione: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$;
- si interpreta $R^m_j(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_2;
- si interpreta $R^n_h(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_3.

Che relazione c'è tra O_2, O_3 ed O_1?
Si può riconoscere identità; e ciò significa allora che c'è una conoscenza previa a monte, in base alla quale l'identità può essere stabilita.

[2] Faccio riferimento a Duval (1993).

Si può non riconoscere affatto identità, nel senso che l'"interpretazione" è o sembra essere diversa, ed allora si è perso il *senso* dell'oggetto (significato) di partenza O_1.
Uno schema come il seguente può riassumere quel che è accaduto in aula da un punto di vista complesso, che chiama in causa gli elementi che voglio porre in connessione tra loro: oggetti, significati, rappresentazioni semiotiche e senso:



Nel nostro esempio:

- oggetto - significato O_1: «probabilità dell'uscita di un numero pari nel lancio di un dado»;
- senso: l'esperienza condivisa come pratica d'aula in situazione a-didattica e sotto la regìa dell'insegnante, porta a ritenere che il senso di O_1 sia quello descritto dagli allievi ed auspicato dall'insegnante: tante uscite possibili e, rispetto ad esse, tante uscite favorevoli al verificarsi dell'evento;
- scelta di un registro semiotico r^m: numeri razionali Q espressi sotto forma di frazioni; rappresentazione: $R^m{}_i(O_1)$: $\frac{3}{6}$;
- trattamento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_j(O_1)$, cioè da $\frac{3}{6}$ a $\frac{1}{2}$;
- trattamento: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^m{}_k(O_1)$, cioè da $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$;
- conversione: $R^m{}_i(O_1) \rightarrow R^n{}_h(O_1)$, cioè da $\frac{3}{6}$ a 50%;
- si interpreta $R^m{}_j(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_2;
- si interpreta $R^m{}_k(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_3;

- si interpreta $R^n{}_h(O_1)$ riconoscendo in esso l'oggetto (significato) matematico O_4.

Che relazione c'è tra O_2, O_3, O_4 ed O_1?
In alcuni casi (O_2, O_4), si è riconosciuta identità di significante; e ciò significa che c'è a monte una conoscenza già costruita che permette di riconoscere lo stesso oggetto; il *senso* è condiviso, unico;
in un altro caso (O_3), non si è riconosciuta identità di significante, nel senso che l'"interpretazione" è o sembra essere diversa, ed allora si è perso il *senso* dell'oggetto (significato) O_1.
La tematica relativa a più rappresentazioni dello stesso oggetto è presente in Duval (2005).

Non è detto che la perdita di senso avvenga solo a causa della conversione; nel nostro esempio, come abbiamo visto, è avvenuta a causa di un trattamento (il passaggio da $\frac{3}{6}$ a $\frac{4}{8}$).
L'interpretazione di $\frac{4}{8}$ data dal maestro non ammetteva come plausibile oggetto lo stesso O_1 che aveva tratto origine dal senso condiviso che aveva portato alla rappresentazione $\frac{3}{6}$.

7. Conclusione

Non sembrano necessarie lunghe conclusioni. Mi preme solo evidenziare come il *senso* di un oggetto matematico sia qualche cosa di più complesso rispetto all'usuale coppia (oggetto, sue rappresentazioni); ci sono legami semiotici tra le coppie di questo tipo:

(oggetto, sua rappresentazione) – (oggetto, sua altra rappresentazione),

legami dovuti a trasformazioni semiotiche tra le rappresentazioni dello stesso oggetto, che però hanno il risultato di far perdere il senso dell'oggetto di partenza. Sebbene sia l'oggetto che le trasformazioni semiotiche siano il risultato di pratiche condivise, i risultati delle trasformazioni possono necessitare di altre attribuzioni di senso grazie ad altre pratiche condivise. Il che arricchisce di ulteriore interesse ogni studio su ontologia e conoscenza.

Il fenomeno che appare qui descritto può essere usato per completare la visione che Duval offre del ruolo delle multiple rappresentazioni di un oggetto nella comprensione di tale oggetto, e anche per rompere il "circolo vizioso" del suo paradosso. Il fatto è che, in realtà, ogni rappresentazione porta associato un "sottosistema di pratiche" *diverse*, dalle quali emergono oggetti *diversi* (in precedenza chiamati O_1, O_2, O_3 y O_4). Ma l'articolazione di questi oggetti in un altro più generale richiede un cambio di prospettiva, il passaggio ad altro contesto nel quale si fonda la ricerca della *struttura comune* nel sistema di pratiche globale nel quale intervengono i distinti “oggetti parziali”. Senza dubbio, l’uso di diverse rappresentazioni e la sua progressiva articolazione arricchisce il significato, la conoscenza, la comprensione dell’oggetto, ma anche la sua complessità. L’oggetto matematico si presenta, in un certo senso, come unico, ma, in un altro senso, come molteplice. Qual è la natura dell’oggetto matematico, dunque? Non sembra vi sia altra risposta che non sia quella strutturale, formale, grammaticale (in senso epistemologico), e, allo stesso tempo, quella strutturale mentale globale (in senso psicologico) che noi soggetti costruiamo nei nostri cervelli mano a mano che si arricchiscono le nostre esperienze.

È ovvio che queste osservazioni aprono la strada a futuri sviluppi nei quali idee che sembrano così diverse, concorrono invece a tentare di dare spiegazioni ai fenomeni di attribuzione di senso.

Bibliografia

D’Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.

D’Amore B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*. 23, 1, 47-51.

D’Amore B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [Versione in lingua spagnola: D’Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matematica*. México DF, México: Reverté-Relme. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla]. [Versione in lingua portoghese: D’Amore B. (2005). *As bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas e conceituais da didáctica da matematica*. Prefácio da edição italiana: Guy Brousseau. Prefácio: Ubiratan D’Ambrosio Tradução: Maria Cristina Bonomi Barufi. Escrituras: São Paulo].

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 5, 37-65.

Duval R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels ‘apprentissages premiers’ de l’activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. 8, 13-62.

Duval R. (2005). Transformations de representations semiotiques et demarche de pensée en mathématiques. Colloque COPIRELEM, Strasbourg, 30 maggio - 1 giugno 2006. Atti in corso di stampa.

Radford L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-23.

Radford L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*. 2, 191-213.